3.4 **การชน** (Collision)

การชนกันของวัตถุ คือ การที่วัตถุอย่างน้อย 2 ก้อน เคลื่อนที่เข้าชนกันในช่วงเวลาสั้น ๆ เช่น การชนกันของรถ การกระทบกันของลูกตุ้มกับเสาเข็ม การตีเทนนิส ตีปิงปอง การระเบิดของวัตถุระเบิด การยิงปืน ฯลฯ

ในการชนของวัตถุปกติจะไม่มีแรงภายนอกมากระทำ ซึ่งขนาดของแรงในการชนจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับลักษณะการชนกันของวัตถุ เราอาจแยกการชนออกเป็น 2 ลักษณะ คือ **1) เมื่อโมเมนตัมของระบบมีค่าคงที่** เป็นการชนที่ขณะชนมีแรงภายนอกมากระทำต่อวัตถุน้อยมาก เมื่อเทียบกับขนาดของแรงดล ที่เกิดขึ้นชณะวัตถุชนกัน เช่น การชนกันของลูกบิลเลียด การชนกันของรถยนต์ การยิงปืน และ **2) เมื่อโมเมนตัมของระบบไม่คงที่** เป็นการชนกันที่ขณะชนมีแรงภายนอกมากระทำมากกว่าแรงดลที่เกิดกับวัตถุขณะชนกัน เช่น ลูกบอลตกกระทบพื้น รถยนต์ชนกับต้นไม้

ในหัวข้อนี้เป็นการชนของวัตถุเมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อระบบ ซึ่งแยกเป็นลักษณะการชนได้ 3 แบบ

3.4.1 **การชนกันแบบยืดหยุ่น** (Elastic collision)

การชนกันแบบยืดหยุ่น เป็นการชนกันของวัตถุ แล้วรูปร่างของวัตถุไม่เปลี่ยนแปลง เช่น การชนกันของลูกบิลเลียด การชนกันของลูกบอล หรือการชนกันของวัตถุที่มีความยืดหยุ่น แบ่งเป็น 2 ลักษณะคือ **1) การชนกันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์** เป็นการชนกันที่**ไม่มีการสูญเสียพลังงานจลน์** และ**รูปร่างของวัตถุไม่เปลี่ยนแปลง** (ชนแล้วหนี) **2) การชนกันแบบยืดหยุ่นไม่สมบูรณ์** เป็นการชนกันที่**มีการสูญเสียพลังงานจลน์** โดยเปลี่ยนไปเป็นพลังงานรูปอื่น และ**รูปร่างของวัตถุไม่เปลี่ยนแปลง** (ชนแล้วหนี)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเฉพาะการชนกันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์เท่านั้น

1) **การชนกันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์** (Perfectly elastic collision)

ผลการชนกันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ พบว่า

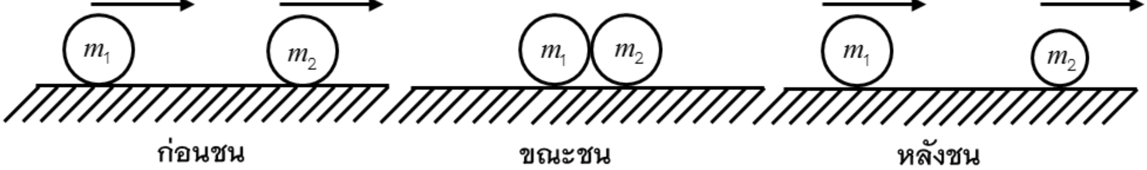
ผลรวมของโมเมนตัมก่อนชน = ผลรวมของโมเมนตัมหลังชน

$$\sum \vec{P}_{\text{ก่อนชน}} = \sum \vec{P}_{\text{หลังชน}}$$

ผลรวมของพลังงานจลน์ก่อนชน = ผลรวมของพลังงานจลน์หลังชน

$$\sum E_{k_{\text{ก่อนชน}}} = \sum E_{k_{\text{หลังชน}}}$$

1.1) **การชนกันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ใน 1 มิติ** คือ การชนกันของวัตถุที่แนวการเคลื่อนที่ของวัตถุอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ทั้งก่อนและหลังการชน (ชนผ่านจุดศูนย์กลางมวล – ชนตรง ๆ)



ภาพ 3.4 – 1 แสดงการชนกันของวัตถุแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ใน 1 มิติ

โดยนายชัยฤทธิ์ พรมขำ นิสิตฝึกประสบการณ์วิชาชีพครู วิทยาลัยการศึกษา มหาวิทยาลัยพะเยา

จาก
$$\sum \vec{P}_{ก่อนชน} = \sum \vec{P}_{หลังชน}$$
$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

เนื่องจากเป็นการชนในแนวเส้นตรงเดียวกัน อาจเขียนเป็นสมการใหม่ได้ว่า

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$
$$m_1u_1 - m_1v_1 = m_2v_2 - m_2u_2$$
$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \qquad \text{... 3.4 – 1}$$

และจาก
$$\sum E_{k_{ก่อนชน}} = \sum E_{k_{หลังชน}}$$
$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$
$$m_1u_1^2 + m_2u_2^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2$$
$$m_1u_1^2 - m_1v_1^2 = m_2v_2^2 - m_2u_2^2$$
$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2) \qquad \text{... 3.4 – 2}$$

นำสมการ 3.4 – 2 $\div$ 3.4 – 1 จะได้

$$\frac{m_1(u_1^2 - v_1^2)}{m_1(u_1 - v_1)} = \frac{m_2(v_2^2 - u_2^2)}{m_2(v_2 - u_2)}$$
$$\frac{(u_1 - v_1)(u_1 + v_1)}{(u_1 - v_1)} = \frac{(v_2 - u_2)(v_2 + u_2)}{(v_2 - u_2)}$$
$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \qquad \text{... 3.4 – 3}$$

ในการแก้ปัญหาการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ โจทย์มักจะถามหาความเร็ว หลังหารชนของมวลทั้งสอง (v_1, v_2) เราจะใช้สมการ 2 สมการคือ

1.
$$\boxed{\begin{array}{c} \sum \vec{P}_{ก่อนชน} = \sum \vec{P}_{หลังชน} \\ \hline m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \end{array}}$$

2.
$$\boxed{u_1 + v_1 = u_2 + v_2}$$

โดยไม่ต้องใส่เครื่องหมายเวกเตอร์ แต่จะใช้เครื่องหมาย + และ – แสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของวัตถุทั้งสองหน้า u หรือ v แล้วแทนค่าลงในสมการทั้งสอง

หมายเหตุ : เราจะกำหนดให้ทิศทางของ v เป็นบวก (+) เสมอ ปริมาณใดมีทิศตรงข้ามเป็นเป็นลบ (–)

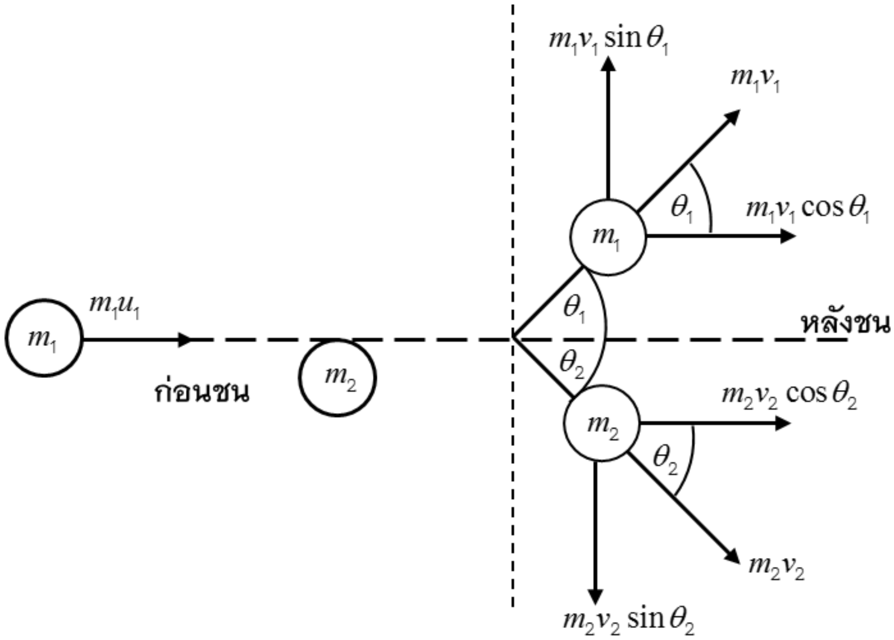
ข้อควรจำสำหรับการชนแบบหยืดหยุ่นสมบูรณ์ใน 1 มิติ

มวล	ก่อนชน	หลังชน
$m_1 = m_2$	$m_1 \xrightarrow{u_1}$ m_2 $u_2 = 0$	m_1 $v_1 = 0$ $m_2 \xrightarrow{v_2 = u_1}$
$m_1 > m_2$	$m_1 \xrightarrow{u_1}$ m_2 $u_2 = 0$	$m_1 \xrightarrow{v_1}$ $(v_1 < u_1)$ $m_2 \xrightarrow{v_2}$
$m_1 < m_2$	$m_1 \xrightarrow{u_1}$ m_2 $u_2 = 0$	$\xleftarrow{v_1} m_1$ $m_2 \xrightarrow{v_2}$

1.2) การชนกันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ใน 2 มิติ คือ การชนกันของวัตถุที่ไม่ได้เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน (ไม่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล – ชนเฉียง ๆ) ทำให้หลังการชนวัตถุเคลื่อนที่แยกจากกันทำมุมกัน

1.2.1) เมื่อมวลทั้ง 2 ก้อนเท่ากัน

กำหนดให้มวล m_1 มีความเร็ว $\vec{u}_1$ เข้าชนมวล m_2 ซึ่งอยู่นิ่งในแนวไม่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล ทำให้มวลทั้งสองแยกออกจากกันทำมุม θ มีความเร็ว $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ ตามลำดับดังภาพ 3.4 – 2



ภาพ 3.4 – 2 แสดงการชนกันของวัตถุแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ใน 2 มิติ เมื่อมวลเท่ากัน

ผลการการชนจะได้ว่า

(1) พิจารณาแนวแกน X จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม จะได้

$$\sum \vec{P}_{X_{ก่อนชน}} = \sum \vec{P}_{X_{หลังชน}}$$

$$m_1\vec{u}_1 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$m_1u_1 = m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2 \quad \text{... 3.4 – 4}$$

(2) พิจารณาแนวแกน Y จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม จะได้

$$\sum \vec{P}_{Y_{ก่อนชน}} = \sum \vec{P}_{Y_{หลังชน}}$$

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$0 + 0 = m_1v_1\sin\theta_1 + m_2v_2\sin\theta_2$$

$$m_1v_1\sin\theta_1 = m_2v_2\sin\theta_2 \quad \text{... 3.4 – 5}$$

(3) เมื่อพิจารณาโมเมนตัมลัพธ์จะได้ว่า

$$\sum \vec{P}_{ก่อนชน} = \sum \vec{P}_{หลังชน}$$

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$u_1^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \quad \text{... 3.4 – 6}$$

(4) เนื่องจากเป็นการชนแบบยืดหยุ่น จากกฎกนุรักษ์พลังงานจะได้ว่า

$$\sum E_{k_{ก่อนชน}} = \sum E_{k_{หลังชน}}$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$u_1^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad \text{... 3.4 – 7}$$

จะเห็นว่าสมการ 3.4 – 6 = สมการ 3.4 – 7 จะได้ว่า

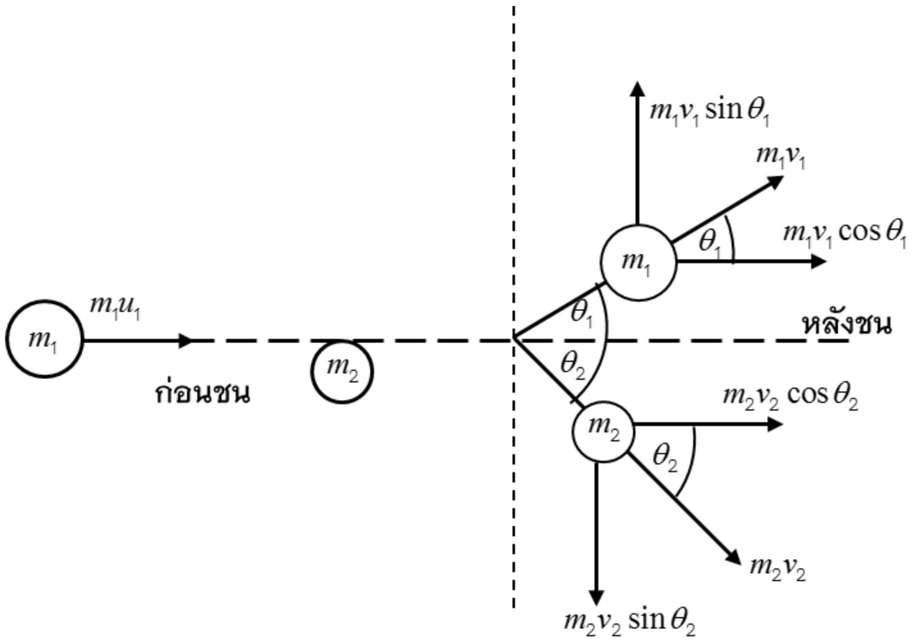
$$2v_1v_2\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = 90^\circ$$

1.2.2) เมื่อมวลทั้ง 2 ก้อนไม่เท่ากัน

กำหนดให้มวล m_1 เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{u}_1$ เคลื่อนที่เข้าชนมวล m_2 ซึ่งอยู่นิ่งในแนวไม่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล (C.M.) ทำให้มวล m_1 และ m_2 แยกออกจากกันทำมุม α และ β กับแนวการเคลื่อนที่เดิมของ $\vec{u}_1$ ด้วยความเร็ว $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ ตามลำดับดังภาพ 3.4 – 3



ภาพ 3.4 – 2 แสดงการชนกันของวัตถุแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ใน 2 มิติ เมื่อมวลไม่เท่ากัน

การหา $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ ทำได้สองวิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 โดยการแยก $m_1\vec{u}_1$ ให้เป็น $m_1\vec{v}_1$ และ $m_2\vec{v}_2$

จาก

$$\sum \vec{P}_{ก่อนชน} = \sum \vec{P}_{หลังชน}$$

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$m_1\vec{u}_1 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \quad \text{... 3.4 – 8}$$

ตามหลักการแยกเวกเตอร์แบบไม่ตั้งฉากจะได้ว่า

$$m_1v_1 = \frac{m_1u_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \quad \text{... 3.4 – 9}$$

และ

$$m_2\vec{v}_2 = \frac{m_1u_1\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \quad \text{... 3.4 – 10}$$

วิธีที่ 2 การหาโมเมนตัมลัพธ์ในแนว $m_1\vec{u}_1$ และในแนวตั้งฉากกับ $m_1\vec{u}_1$

จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\sum \vec{P}_{\text{ก่อนชน}} = \sum \vec{P}_{\text{หลังชน}}$$

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$m_1\vec{u}_1 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

เราจะอาศัยการแยกเวกเตอร์ของ m_1v_1 และ $m_2\vec{v}_2$ ให้อยู่ในแนวขนาน และตั้งฉากกับ $m_1\vec{u}_1$

พิจารณาในแนวตั้งฉากกับ $m_1\vec{u}_1$ พบว่า

$$\sum \vec{P} = 0$$

$$m_1v_1\sin\theta_1 = m_2\vec{v}_2\sin\theta_2 \qquad \text{... 3.4 – 11}$$

พิจารณาในแนวขนานกับ $m_1\vec{u}_1$ พบว่า

$$\sum \vec{P} = m_1\vec{u}_1$$

ดังนั้น

$$m_1v_1\cos\theta_1 + m_2\vec{v}_2\cos\theta_2 = m_1u_1 \qquad \text{... 3.4 – 12}$$

1.2.3) ข้อสังเกตสำหรับการชนใน 2 มิติ

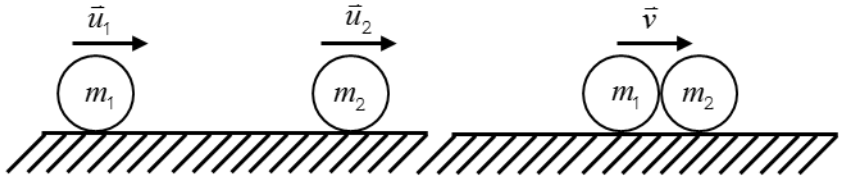
1) ถ้า $m_1 = m_2$ จะได้ $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$

2) ถ้า $m_1 > m_2$ จะได้ $\theta_1 + \theta_2 < 90^\circ$

3) ถ้า $m_1 < m_2$ จะได้ $\theta_1 + \theta_2 > 90^\circ$

3.4.2 การชนกันแบบไม่ยืดหยุ่น (Inelastic collision)

เป็นการชนที่ภายหลังการชนแล้ววัตถุทั้งสองเคลื่อนที่ติดกันไป (มีการเปลี่ยนรูปร่าง) ผลของการชนลักษณะนี้จะเป็นไปตามกฎอนุรักษ์โมเมนตัม แต่จะไม่เป็นไปตามกฎอนุรักษ์พลังงาน



ภาพ 3.4 – 3 การชนกันของวัตถุแบบไม่ยืดหยุ่น

ผลของการชนกันแบบไม่ยืดหยุ่น

(1) จาก

$$\sum \vec{P}_{\text{ก่อนชน}} = \sum \vec{P}_{\text{หลังชน}}$$

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

เมื่อ $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$ ได้ว่า

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)\vec{v} \qquad \text{... 3.4 – 13}$$

(2)

$$\sum E_{k_{\text{ก่อนชน}}} \neq \sum E_{k_{\text{หลังชน}}}$$

การชนแบบนี้พลังงานจลน์ของระบบมีค่าไม่คงที่ จะได้ว่า

$$\Delta E_k = E_{k_{\text{หลังชน}}} - E_{k_{\text{ก่อนชน}}}$$

ถ้า

(2.1) ΔE_k มีค่าเป็นบวก แสดงว่า พลังงานของระบบเพิ่มขึ้น

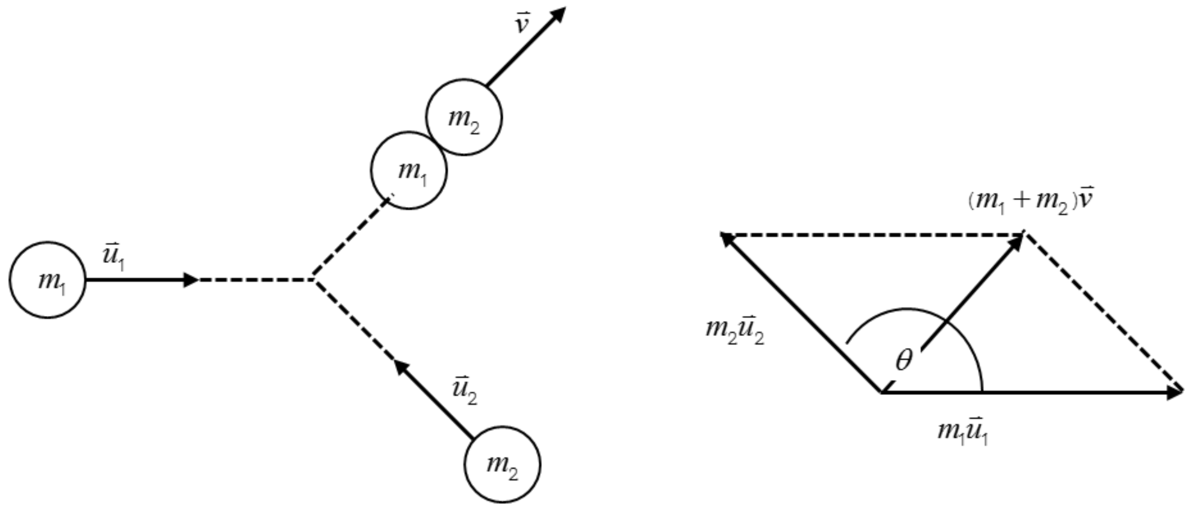
(2.2) ΔE_k มีค่าเป็นลบ แสดงว่า พลังงานของระบบลดลง

1) การชนกันแบบไม่ยืดหยุ่น ใน 1 มิติ

ผลของการชนกันแบบไม่ยืดหยุ่นใน 1 มิติจะเป็นไปตามที่กล่าวไปข้างต้นแล้ว

2) การชนกันแบบไม่ยืดหยุ่น ใน 2 มิติ

ถ้ามวล m_1 มีความเร็ว $\vec{u}_1$ เคลื่อนที่เข้าชนมวล m_2 ซึ่งมีความเร็ว $\vec{u}_2$ ในแนวทำมุม θ ต่อกันหลังชนกันแล้วทั้งสองเคลื่อนที่ติดกันไปดังภาพ 3.4 – 4 ด้วยความเร็ว $\vec{v}$



ภาพ 3.4 – 4 แสดงการชนกันแบบไม่ยืดหยุ่นใน 2 มิติ

จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\sum \vec{P}_{\text{ก่อนชน}} = \sum \vec{P}_{\text{หลังชน}}$$

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1+m_2)\vec{v}$$

หรือ

$$(m_1+m_2)v = \sqrt{(m_1u_1)^2 + (m_1u_2)^2 + 2(m_1u_1)(m_2u_2)\cos\theta}$$

3.4.3 การดีดตัวหรือการระเบิดของวัตถุ

คือ การที่วัตถุมีการแยกตัวออกจากกัน โดยไม่มีแรงภายนอกมากระทำ ซึ่งมีเงื่อนไขเหมือนกับการชนใน 2 ลักษณะที่กล่าวมาแล้ว คือ

$$\sum \vec{P}_{\text{ก่อนชน}} = \sum \vec{P}_{\text{หลังชน}}$$

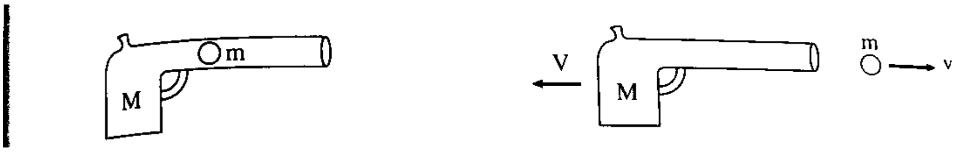
ส่วนพลังงานจลน์ของวัตถุหลังการระเบิด พบว่าผลรวมพลังงานจลน์หลังการระเบิด จะค่ามากกว่าผลรวมพลังงานจลน์หลังระเบิด

$$\sum E_{k_{\text{ก่อนชน}}} > \sum E_{k_{\text{หลังชน}}}$$

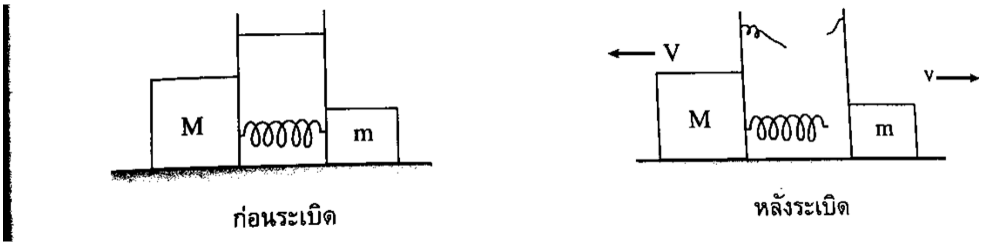
ลักษณะของการระเบิดแยกได้ 2 ลักษณะ คือ

1) **การระเบิกแยกออกจากกัน** การระเบิดของวัตถุลักษณะนี้วัตถุจะแยกออกจากกันเป็นส่วน ๆ เช่น

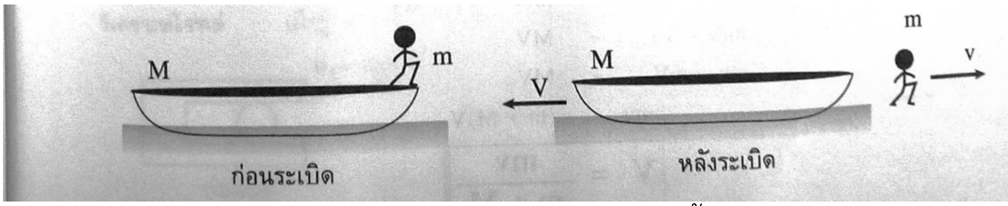
1.1) การยิงปืน เดิมกระสุนและปืนอยู่ด้วยกัน ตัวปืนมีมวล M ลูกปืนมีมวล m หลังยิงลูกปืนมีความเร็ว v ตัวปืนมีความเร็ว V (ถอยหลัง)



1.2) มวลอัดสปริง วัตถุมวล M และ m ผูกติดกันด้วยเชือกและมีสรปิงติดอยู่ที่มวลก้อนใดก้อนหนึ่ง เมื่อตัดเชือกขาดมวล M และ m จะเคลื่อนที่ออกจากกันด้วยความเร็ว V และ v ตามลำดับ



1.3) คนกระโดดจากเรือ เดิมคนมีมวล m ซึ่งอยู่บนเรือ ซึ่งมีมวล M เมื่อคนกระโดดออกจากเรือด้วยความเร็ว v เรือจะเคลื่อนที่ถอยหลังด้วยความเร็ว V



จากตัวอย่างการระเบิดแยกจากกันจะได้สมการดังนี้

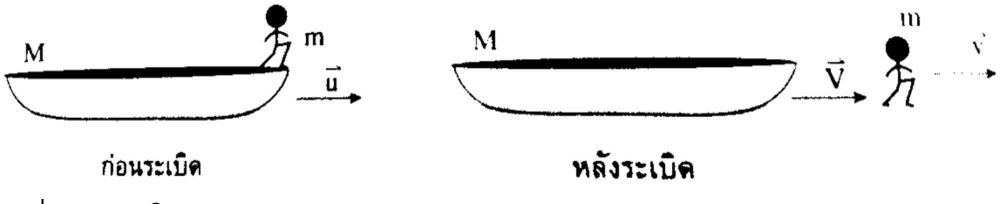
$$\sum \vec{P}_{\text{ก่อนระเบิด}} = \sum \vec{P}_{\text{หลังระเบิด}}$$

$$0 = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$0 = M(-V) + mv$$

$$MV = mv \qquad \text{... 3.4 – 14}$$

1.4) คนกระโดดจากเรื่อซึ่งกำลังเคลื่อนที่ เดิมคนมีมวล m ยืนอยู่บนเรือมีมวล M ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{u}$ แล้วคนกระโดดออกจากเรือทางด้านหน้าด้วยความเร็ว $\vec{v}$ ทำให้เรือมีความเร็ว $\vec{V}$



เมื่อคนกระโดดออกจากเรือแล้วได้ว่า

$$\sum \vec{P}_{\text{ก่อนระเบิด}} = \sum \vec{P}_{\text{หลังระเบิด}}$$

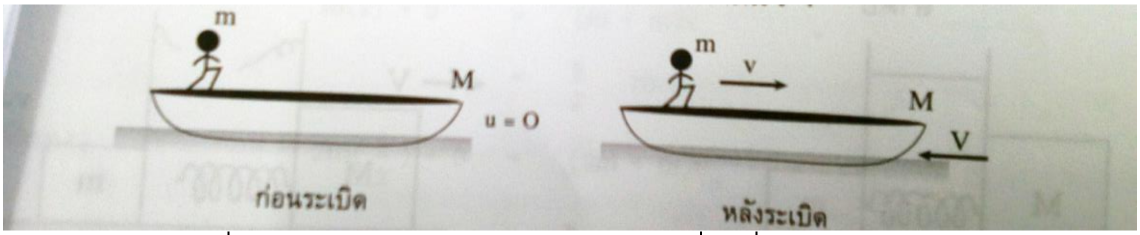
$$(M+m)u = mv + MV$$

$$mu + Mu - mv = MV$$

$$V = \frac{m(u-v) + Mu}{M} \qquad \text{... 3.4 – 15}$$

2) **การระเบิดแบบสัมพัทธ์** โดยภายหลังการระเบิดแล้ววัตถุยังอยู่ด้วยกัน การคำนวณความเร็วของวัตถุแต่ละก้อนให้คิดเทียบกับพื้นโลก

2.1) คนเดินบนเรือซึ่งอยู่นิ่ง ให้คนมวล m อยู่นิ่งบนเรือมวล M เมื่อคนเดินด้วยความเร็ว v จะทำให้เรือเคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้าม V



ขณะที่คนเดินด้วยความเร็ว v จะทำให้เรือเคลื่อนที่ในทิสทางตรงกันข้ามด้วยความเร็ว V เมื่อเทียบกับพื้นโลก คนจะมีความเร็ว $(v-V)$ ดังนั้น

$$\sum \vec{P}_{\text{ก่อนระเบดิ}} = \sum \vec{P}_{\text{หลงัระเบดิ}}$$

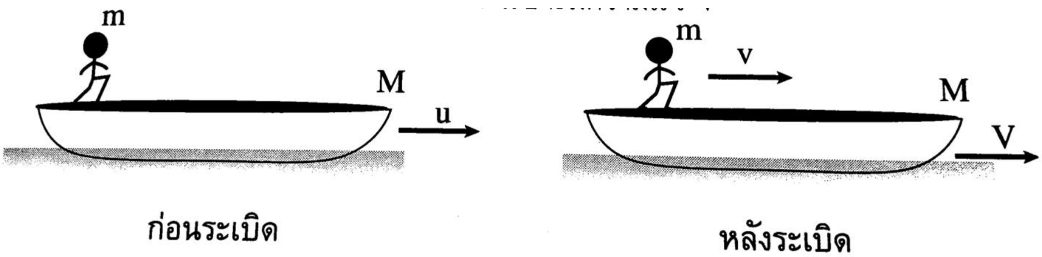
$$0 = m(v-V)+m\ (-V)$$

$$m(v-V) = m\,V$$

$$mv = (m+M)V$$

$$V = \frac{mv}{m+M} \qquad \text{... 3.4 – 16}$$

2.2) คนเดินบนเรือซึ่งกำลังเคลื่อนที่ ให้คนมวล m อยู่นิ่งบนเรือมวล M ซึ่งมีความเร็ว u เมื่อคนเริ่มเดินด้วยความเร็ว v จะทำให้เรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว V



คณะที่คนเดินด้วยความเร็ว v ความเร็วของเรือเป็น V ความเร็วของคนเมื่อเทียบกับพื้นโลกจะเท่ากับ $v + V$

$$\sum \vec{P}_{\text{ก่อนระเบดิ}} = \sum \vec{P}_{\text{หลงัระเบดิ}}$$

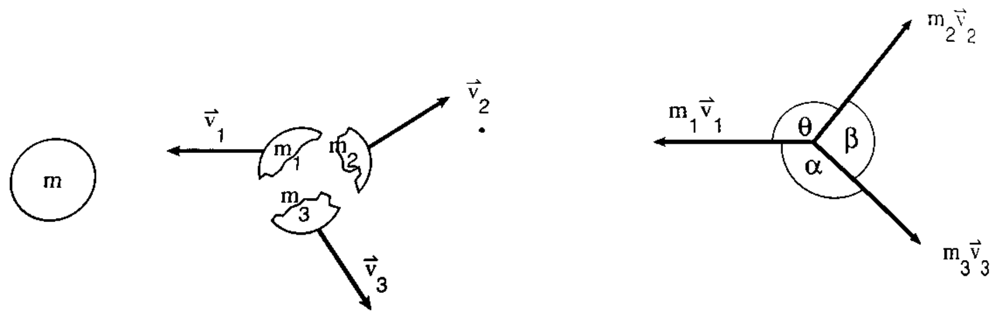
$$(m+M)u = m(v+V)+MV$$

$$mu+Mu = mv+mV+MV$$

$$mu-mv+Mu = (m+M)V$$

$$V = \frac{m(u-v)+Mu}{m+M} \qquad \text{... 3.4 – 16}$$

3) การระเบิดใน 2 มิติ ให้วัตถุมวล m เดิมนิ่งอยู่แล้วระเบิดแยกออกเป็น 3 ส่วน แต่ละส่วนมีมวล m_1 m_2 และ m_3 ตามลำดับ มีมีความเร็ว $\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$ และ $\vec{v}_3$ ตามลำดับ ดังภาพ 3.4 – 5



ภาพ 3.4 – 5 แสดงการระเบิดใน 2 มิติ

จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\sum \vec{P}_{\text{ก่อนระเบดิ}} = \sum \vec{P}_{\text{หลังระเบดิ}}$$

$$0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$

$$-m_3\vec{v}_3 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

หรือ $$m_3v_3 = \sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2 + 2(m_1u_1)(m_2u_2)\cos\theta}$$

หรือ $$m_1v_1 = \sqrt{(m_2v_2)^2 + (m_3v_3)^2 2(m_2u_2)(m_3u_3)\cos\beta}$$

หรือ $$m_2v_2 = \sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_3v_3)^2 2(m_1v_1)(m_3u_3)\cos\alpha}$$